Faculté des Sciences et Techniques de Tanger
MIPCI , Epreuve d'algèbre , Second semestre 2009-2010

Très important :
(i) Documents non autorisés. Les calculatrices ne sont pas autorisées non plus.
(ii) La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront dans l'appréciation des copies.

Exercice 1.

Pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on note $M_{a,b}$ la matrice carrée d'ordre 2 donnée par :
$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$

1. Montrer que toute matrice $M_{a,b}$ peut s'écrire sous la forme $aJ + bK$ où J et K sont independantes de a et b.

2. On considére l'ensemble E des matrices carées d'ordre 2 définie par :
$E = \{M_{a,b} \in M_2(\mathbb{R}); (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
On munit E des opérations usuelles (addition des matrices et multiplications par un scalaire).
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$. Donner une base B' de E.

3. Calculer J^2, JK, KJ et K^2. La multiplication des matrices est-elle stable dans E

4. Calculer J^n et K^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire $M_{a,b}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Pour quelles valeurs de a et b, $M_{a,b}$ est inversible ?
Calculer l'inverse $M_{a,b}^{-1}$ de $M_{a,b}$.
$M_{a,b}^{-1}$ est il élément de E ?

6. Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans E définie par :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & E \\ (a,b) & \to & M_{ab} \end{array} \right.$$

Montrer que g est une application linéaire et déterminer $\ker g$ et $\mathrm{Im} g$. g est-elle bijective ?

Exercice 2.

1. Trouver le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

2. On considére le système suivant : $\begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ x - \sqrt{2}y + z = a \\ y - \sqrt{2}z = 1 \end{cases}$
(où a est un paramètre réel). Ce système est il de Cramer ?

3. Pour quelle valeur de a le système est compatible.

Exercice 3.

Soit $P(X) = 1 - 2X + 2X^3 - 2X^5 + X^6$.

1.) Montrer que $s_1 = 1$ est racine double de P.

2.) Effectuer la division euclidienne de P par $(X-1)^2$.

3.) Soient $s_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ et $s_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ deux nombres complexes.
- Donner l'écriture exponentielle de s_2 et s_3.
- Montrer que s_2 et s_3 sont racines de P.
- Justifier pourquoi $\bar{s_2}$ et $\bar{s_3}$ sont racines de P.

4.) Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

ETUSUP .com

CC2 09_10

EX1

1/ $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

d'où $M_{a,b} = aJ + bK \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2/ Soient $M_{a,b}$ et $M_{a',b'}$ 2 matrice de E alors :

$M_{a,b} = aJ + bK$ et $M_{a',b'} = a'J + b'K$

$M_{a,b} + M_{a',b'} = (a+a')J + (b+b')K \in E$

et $\alpha M_{a,b} = \alpha(aJ + bK) = (\alpha a)J + (\alpha b)K \in E$

3/ $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2J$; $K^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2K$

$JK = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $KJ = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$M_{a,b} \times M_{a',b'} = (aJ + bK)(a'J + b'K) = aa'J^2 + ab'JK + ba'KJ + bb'K^2$

$= (aa')(2J) + 0 + 0 + bb'(2K) = 2aa'J + 2bb'K$

Ainsi $M_{a,b} \times M_{a',b'} \in E$ donc la multiplication est stable dans E

4/. On a : $J^2 = 2J$; $J^3 = J^2 . J = 2J . J = 2 . J^2 = 2^2 . J$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad J^n = 2^{n-1} J$ (par récurrence sur n)

- Pour $n = 1$ c'est vérifiée $J^1 = 2^{1-1} . J$
- Supp que $J^n = 2^{n-1} . J$ et m. que $J^{n+1} = 2^n . J$

$J^{n+1} = J^n . J = 2^{n-1} . J . J = 2^{n-1} . J^2 = 2^{n-1} . 2J = 2^n . J$

- Meme chose pour K : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad K^n = 2^{n-1} . K$

5/. $\det M_{a,b} = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

- $M_{a,b}$ est inversible $\Leftrightarrow \det M_{a,b} \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ et $b \neq 0$
- $\mathrm{Com}\, M_{a,b} = \begin{pmatrix} a+b & b-a \\ b-a & a+b \end{pmatrix} \quad M_{a,b}^{-1} = \frac{1}{4ab}\begin{pmatrix} a+b & b-a \\ b-a & a+b \end{pmatrix}$

$M_{a,b}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} - \frac{1}{4a} \\ \frac{1}{4b} - \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} \end{pmatrix}$ ou $M_{a,b}^{-1}$

ETUSUP .com

6/ $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow E$

$(a,b) \longrightarrow M_{a,b}$

$$g[(a,b)+(a',b')] = g((a+a', b+b')) = M_{a+a', b+b'}$$
$$= (a+a')J + (b+b')K = (aJ+bK) + (a'J+b'K)$$
$$= g(a,b) + g(a',b')$$

$$g(\alpha(a,b)) = g(\alpha a, \alpha b) = M_{\alpha a, \alpha b} = (\alpha a)J + (\alpha b)K$$
$$= \alpha(aJ+bK) = \alpha\, g(a,b)$$

- $(a,b) \in \operatorname{Ker} g \Leftrightarrow g(a,b) = 0 \Leftrightarrow M_{a,b} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=0$
$\Rightarrow \operatorname{Ker} g = \{(0,0)\}$
- $M' \in \operatorname{Im} g \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / M' = g(a,b)$ càd $M' = M_{a,b}$
$M' = aJ + bK \Rightarrow \operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}(J,K) = E$
- $\operatorname{Ker} g = \{(0,0)\} \Rightarrow g$ est injective ; $\operatorname{Im} g = E \Rightarrow g$ surjective $\Rightarrow g$ est bijective

<u>Exercice 2</u> 1/ $A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ on a $1 \leq \operatorname{rg} A \leq 3$

$$\det A = \begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -\sqrt{2}\begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A \neq 3$$

Or $\begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = 2-1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 2$

2/ $\begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ x - \sqrt{2}y + z = a \\ y - \sqrt{2}z = 1 \end{cases}$ $\Delta = \det A = 0 \Rightarrow$ le système n'a pas une solution unique donc le système n'est pas un système de Cramer

3/ $\begin{matrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{matrix}\begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ x - \sqrt{2}y + z = a \\ y - \sqrt{2}z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \sqrt{2}E_1 + 2E_2 \end{matrix}\begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ -\sqrt{2}y + 2z = 2a \\ y - \sqrt{2}z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ -\sqrt{2}E_3 \end{matrix}\begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ -\sqrt{2}y + 2z = 2a \\ -\sqrt{2}y + 2z = -\sqrt{2} \end{cases}$

le système est compatible si $2a = -\sqrt{2}$ càd $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Divers
Multimedia
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..